Dos nuevos teoremas de suficiencia para mínimos débiles en problemas de control óptimo con restricciones con desigualdades e igualdades

Gilberto Subias García

Facultad de Ciencias, Universidad Nacional Autónoma de México

Dr. Gerardo Sánchez Licea
Director de Tesis

mayo 2018

Índice

Introducción

Introducción

• El *cálculo de variaciones* se planteó para la búsqueda de máximos y mínimos de funcionales continuas definidas sobre algún espacio funcional.

Introducción

• El *cálculo de variaciones* se planteó para la búsqueda de máximos y mínimos de funcionales continuas definidas sobre algún espacio funcional.

• Surgió en el siglo XVIII y fue Euler junto con Lagrange los que lo convirtieron en una teoría matemática rigurosa.

Introducción

• El *cálculo de variaciones* se planteó para la búsqueda de máximos y mínimos de funcionales continuas definidas sobre algún espacio funcional.

• Surgió en el siglo XVIII y fue Euler junto con Lagrange los que lo convirtieron en una teoría matemática rigurosa.

• El *problema de la curva braquistócrana o curva del descenso más rápido*, es considerada como uno de los precursores de la teoría del cálculo variacional.

Curva braquistócrana

Curva braquistócrana

- Planteado inicialmente por Johann Bernoulli y Jakob Bernoulli en 1696.

Curva braquistócrana

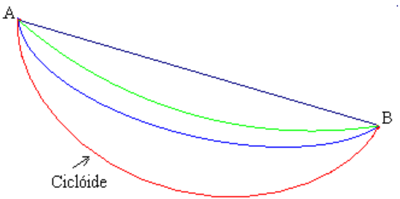
• Planteado inicialmente por Johann Bernoulli y Jakob Bernoulli en 1696.

• Se refiere a encontrar la curva entre dos puntos que es recorrida en menor tiempo por un cuerpo que comienza en el punto inicial, bajo una fuerza de gravedad constante y suponiendo que no existe fricción.

Curva braquistócrana

- Planteado inicialmente por Johann Bernoulli y Jakob Bernoulli en 1696.

- Se refiere a encontrar la curva entre dos puntos que es recorrida en menor tiempo por un cuerpo que comienza en el punto inicial, bajo una fuerza de gravedad constante y suponiendo que no existe fricción.



El problema clásico de cálculo de variaciones con puntos fijos finales

El problema clásico de cálculo de variaciones con puntos fijos finales

Supongamos que tenemos dados un intervalo compacto $T := [t_0, t_1]$ en $\mathbf{R}$, dos puntos fijos ξ_0 y ξ_1 en $\mathbf{R}^n$, y una *función continua* $L(t, x, \dot{x})\colon T \times \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$.

El problema clásico de cálculo de variaciones con puntos fijos finales

Supongamos que tenemos dados un intervalo compacto $T := [t_0, t_1]$ en $\mathbf{R}$, dos puntos fijos ξ_0 y ξ_1 en $\mathbf{R}^n$, y una *función continua* $L(t, x, \dot{x})\colon T \times \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$.

El *problema clásico de cálculo de variaciones con puntos fijos finales* el cual denotaremos por (P), consiste en minimizar la funcional

$$I(x) := \int_{t_0}^{t_1} L(t, x(t), \dot{x}(t))dt$$

sujeta a

(a) $x\colon T \to \mathbf{R}^n$ es C^1 a pedazos.

(b) $x(t_0) = \xi_0$ y $x(t_1) = \xi_1$.

Condición necesaria de Euler

Condición necesaria de Euler

Teorema (Euler):

Supongamos que x_0 es un mínimo débil de (P). Entonces existe una constante $c \in \mathbf{R}^n$ tal que

$$L_{\dot{x}}(t, x_0(t), \dot{x}_0(t)) = \int_{t_0}^{t} L_x(s, x_0(s), \dot{x}_0(s))ds + c^* \quad (t \in T) \tag{1.1}$$

Condición necesaria de Euler

Obsérvese que la ecuación (1.1) es la forma integral de la ecuación de Euler:

Condición necesaria de Euler

Obsérvese que la ecuación (1.1) es la forma integral de la ecuación de Euler:

$$\frac{d}{dt}L_{\dot{x}}(t, x_0(t), \dot{x}_0(t)) = L_x(t, x_0(t), \dot{x}_0(t)) \quad (t \in T).$$

Condición necesaria de Euler

Obsérvese que la ecuación (1.1) es la forma integral de la ecuación de Euler:

$$\frac{d}{dt} L_{\dot{x}}(t, x_0(t), \dot{x}_0(t)) = L_x(t, x_0(t), \dot{x}_0(t)) \quad (t \in T).$$

Si x es C^2 en T y L es C^2 en $T \times \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n$, la ecuación de Euler se convierte en

$$L^*_{\dot{x}t} + L_{\dot{x}x}\dot{x}(t) + L_{\dot{x}\dot{x}}\ddot{x}(t) = L^*_x \quad (t \in T)$$

donde los argumentos en las derivadas de L son $(t, x(t), \dot{x}(t))$.

Condición necesaria de Weierstrass

Definición: *Definamos* $E\colon T \times \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ *por*

$$E(t, x, \dot{x}, u) := L(t, x, u) - L(t, x, \dot{x}) - L_{\dot{x}}(t, x, \dot{x})(u - \dot{x}).$$

A la función E se le llama la función exceso de Weierstrass de L.

Condición necesaria de Weierstrass

Definición: *Definamos* $E\colon T \times \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ *por*

$$E(t,x,\dot{x},u) := L(t,x,u) - L(t,x,\dot{x}) - L_{\dot{x}}(t,x,\dot{x})(u-\dot{x}).$$

A la función E se le llama la función exceso de Weierstrass de L.

Teorema (Weierstrass):

Sea x_0 *un mínimo débil de (P). Entonces existe* $\sigma > 0$ *tal que*

$$E(t,x_0(t),\dot{x}_0(t),u) \geq 0 \quad \text{para toda } (t,u) \in T \times \mathbf{R}^n \text{ con } |u-\dot{x}_0(t)| < \sigma.$$

Condición necesaria de Weierstrass

Definición: *Definamos* $E: T \times \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ *por*

$$E(t, x, \dot{x}, u) := L(t, x, u) - L(t, x, \dot{x}) - L_{\dot{x}}(t, x, \dot{x})(u - \dot{x}).$$

A la función E se le llama la función exceso de Weierstrass de L.

Teorema (Weierstrass):

Sea x_0 *un mínimo débil de (P). Entonces existe* $\sigma > 0$ *tal que*

$$E(t, x_0(t), \dot{x}_0(t), u) \geq 0 \quad \textit{para toda } (t, u) \in T \times \mathbf{R}^n \textit{ con } |u - \dot{x}_0(t)| < \sigma.$$

Teorema (Weierstrass):

Sea x_0 *un mínimo fuerte de (P). Entonces*

$$E(t, x_0(t), \dot{x}_0(t), u) \geq 0 \quad \textit{para toda } (t, u) \in T \times \mathbf{R}^n.$$

Condición necesaria de Legendre

Condición necesaria de Legendre

Corolario (Legendre):

Si x_0 satisface la condición de Weierstrass para un mínimo débil, entonces la matriz Hessiana $L_{\dot{x}\dot{x}}$ es semi-definida positiva a lo largo de x_0, esto es, para toda $h \in \mathbf{R}^n$ y para toda $t \in T$,

$$\langle h, L_{\dot{x}\dot{x}}(t, x_0(t), \dot{x}_0(t))h \rangle \geq 0. \tag{1.3}$$

La condición (1.3) se conoce como la *condición de Legendre*.

Condición necesaria de Jacobi

Condición necesaria de Jacobi

Definición: *Un punto* $t = s$ *en* $(t_0, t_1]$ *se dice que es un punto conjugado a* $t = t_0$ *sobre* x_0 *si hay un extremo accesorio* y *tal que* $y(t_0) = y(s) = 0$, *y* $y \not\equiv 0$ *en* (t_0, s).

Condición necesaria de Jacobi

Definición: *Un punto* $t = s$ *en* $(t_0, t_1]$ *se dice que es un punto conjugado a* $t = t_0$ *sobre* x_0 *si hay un extremo accesorio* y *tal que* $y(t_0) = y(s) = 0$, *y* $y \not\equiv 0$ *en* (t_0, s).

Teorema (Jacobi):

Si un arco no singular sin esquinas x_0 *es un mínimo débil de (P), entonces no hay ningún punto* $s \in (t_0, t_1)$ *conjugado a* $t = t_0$ *sobre* x_0.

Teoremas fundamentales de suficiencia

Teoremas fundamentales de suficiencia

Teorema:

Sea x_0 admisible de clase C^1. Supongamos que

Teoremas fundamentales de suficiencia

Teorema:

Sea x_0 admisible de clase C^1. Supongamos que

a. $L_{\dot{x}\dot{x}}(t, x_0(t), \dot{x}_0(t)) > 0$ $(t \in T)$.

b. $\frac{d}{dt} L_{\dot{x}}(t, x_0(t), \dot{x}_0(t)) = L_x(t, x_0(t), \dot{x}_0(t))$ $(t \in T)$.

c. $c \in (t_0, t_1] \implies c$ *no es un punto conjugado a* t_0 *sobre* x_0.

Teoremas fundamentales de suficiencia

Teorema:

Sea x_0 admisible de clase C^1. Supongamos que

a. $L_{\dot{x}\dot{x}}(t, x_0(t), \dot{x}_0(t)) > 0$ $(t \in T)$.

b. $\frac{d}{dt}L_{\dot{x}}(t, x_0(t), \dot{x}_0(t)) = L_x(t, x_0(t), \dot{x}_0(t))$ $(t \in T)$.

c. $c \in (t_0, t_1] \Longrightarrow c$ *no es un punto conjugado a* t_0 *sobre* x_0.

Entonces x_0 es un mínimo débil estricto de (P).

Teoremas fundamentales de suficiencia

Teoremas fundamentales de suficiencia

Teorema:

Sea x_0 admisible de clase C^1. Supongamos que

Teoremas fundamentales de suficiencia

Teorema:

Sea x_0 admisible de clase C^1. Supongamos que

a. $L_{\dot{x}\dot{x}}(t, x_0(t), \dot{x}_0(t)) > 0$ $(t \in T)$.

b. $\frac{d}{dt}L_{\dot{x}}(t, x_0(t), \dot{x}_0(t)) = L_x(t, x_0(t), \dot{x}_0(t))$ $(t \in T)$.

c. *Para alguna* $\epsilon > 0$, $E(t, x, \dot{x}, u) \geq 0$ *para* $(t, x, \dot{x}, u)$ *con* $(t, x, \dot{x}) \in \mathcal{T}_1(x_0; \epsilon)$.

d. $c \in (t_0, t_1] \implies c$ *no es un punto conjugado a* t_0 *sobre* x_0.

Teoremas fundamentales de suficiencia

Teorema:

Sea x_0 admisible de clase C^1. Supongamos que

a. $L_{\dot{x}\dot{x}}(t, x_0(t), \dot{x}_0(t)) > 0$ $(t \in T)$.

b. $\frac{d}{dt}L_{\dot{x}}(t, x_0(t), \dot{x}_0(t)) = L_x(t, x_0(t), \dot{x}_0(t))$ $(t \in T)$.

c. *Para alguna* $\epsilon > 0$, $E(t, x, \dot{x}, u) \geq 0$ *para* $(t, x, \dot{x}, u)$ *con* $(t, x, \dot{x}) \in \mathcal{T}_1(x_0; \epsilon)$.

d. $c \in (t_0, t_1] \implies c$ *no es un punto conjugado a* t_0 *sobre* x_0.

Entonces x_0 *es un mínimo fuerte estricto de (P).*

Planteamiento del problema

Planteamiento del problema

El problema de **control óptimo** con puntos fijos finales

Es el de minimizar la funcional

Planteamiento del problema

El problema de **control óptimo** con puntos fijos finales

Es el de minimizar la funcional

$$I(x,u) := \int_{t_0}^{t_1} L(t, x(t), u(t))dt$$

Planteamiento del problema

El problema de **control óptimo** con puntos fijos finales

Es el de minimizar la funcional

$$I(x,u) := \int_{t_0}^{t_1} L(t, x(t), u(t))dt$$

sobre todas las parejas (x, u) con $x\colon T \to \mathbf{R}^n$ absolutamente continua y $u\colon T \to \mathbf{R}^m$ esencialmente acotada, que satisfacen las restricciones

Planteamiento del problema

El problema de **control óptimo** con puntos fijos finales

Es el de minimizar la funcional

$$I(x, u) := \int_{t_0}^{t_1} L(t, x(t), u(t))dt$$

sobre todas las parejas (x, u) con $x\colon T \to \mathbf{R}^n$ absolutamente continua y $u\colon T \to \mathbf{R}^m$ esencialmente acotada, que satisfacen las restricciones

(a) $\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t))$ (c.s. en T).

Planteamiento del problema

El problema de **control óptimo** con puntos fijos finales

Es el de minimizar la funcional

$$I(x,u) := \int_{t_0}^{t_1} L(t,x(t),u(t))dt$$

sobre todas las parejas (x,u) con $x\colon T \to \mathbf{R}^n$ absolutamente continua y $u\colon T \to \mathbf{R}^m$ esencialmente acotada, que satisfacen las restricciones

(a) $\dot{x}(t) = f(t,x(t),u(t))$ (c.s. en T).

(b) $x(t_0) = \xi_0$, $x(t_1) = \xi_1$.

Planteamiento del problema

El problema de **control óptimo** con puntos fijos finales

Es el de minimizar la funcional

$$I(x,u) := \int_{t_0}^{t_1} L(t,x(t),u(t))dt$$

sobre todas las parejas (x,u) con $x\colon T \to \mathbf{R}^n$ absolutamente continua y $u\colon T \to \mathbf{R}^m$ esencialmente acotada, que satisfacen las restricciones

- **(a)** $\dot{x}(t) = f(t,x(t),u(t))$ (c.s. en T).
- **(b)** $x(t_0) = \xi_0$, $x(t_1) = \xi_1$.
- **(c)** $u(t) \in U$ $(t \in T)$.

donde

$$U := \{u \in \mathbf{R}^m \mid \varphi_\alpha(u) \leq 0\,(\alpha \in R),\ \varphi_\beta(u) = 0\,(\beta \in Q)\}$$

Planteamiento del problema

El problema de **control óptimo** con puntos fijos finales

Es el de minimizar la funcional

$$I(x,u) := \int_{t_0}^{t_1} L(t,x(t),u(t))dt$$

sobre todas las parejas (x,u) con $x\colon T \to \mathbf{R}^n$ absolutamente continua y $u\colon T \to \mathbf{R}^m$ esencialmente acotada, que satisfacen las restricciones

(a) $\dot{x}(t) = f(t,x(t),u(t))$ (c.s. en T).

(b) $x(t_0) = \xi_0$, $x(t_1) = \xi_1$.

(c) $u(t) \in U$ $(t \in T)$.

donde

$$U := \{u \in \mathbf{R}^m \mid \varphi_\alpha(u) \le 0\,(\alpha \in R),\ \varphi_\beta(u) = 0\,(\beta \in Q)\}$$

donde $R = \{1,\ldots,r\}$ y $Q = \{r+1,\ldots,q\}$ $(0 \le r \le q)$. Si $r = 0$ entonces $R = \emptyset$ y hacemos caso omiso de φ_α. Similarmente, si $r = q$ entonces $Q = \emptyset$ y hacemos caso omiso de φ_β.

Procesos admisibles y soluciones locales

Procesos admisibles y soluciones locales

• Supongamos que tenemos dados un intervalo $T := [t_0, t_1]$ en $\mathbf{R}$, dos puntos fijos ξ_0, ξ_1 en $\mathbf{R}^n$, funciones L, f que mapean $T \times \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m$ a $\mathbf{R}$, $\mathbf{R}^n$, y una función $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_q)$ que mapea $\mathbf{R}^m$ a $\mathbf{R}^q$ respectivamente.

Procesos admisibles y soluciones locales

• Supongamos que tenemos dados un intervalo $T := [t_0, t_1]$ en $\mathbf{R}$, dos puntos fijos ξ_0, ξ_1 en $\mathbf{R}^n$, funciones L, f que mapean $T \times \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m$ a $\mathbf{R}$, $\mathbf{R}^n$, y una función $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_q)$ que mapea $\mathbf{R}^m$ a $\mathbf{R}^q$ respectivamente.

• Denotamos por $\mathcal{X}$ al espacio de funciones absolutamente continuas que mapean T a $\mathbf{R}^n$, y definimos $U_s := L^\infty(T; \mathbf{R}^s)$ ($s \in \mathbf{N}$).

Procesos admisibles y soluciones locales

• Supongamos que tenemos dados un intervalo $T := [t_0, t_1]$ en $\mathbf{R}$, dos puntos fijos ξ_0, ξ_1 en $\mathbf{R}^n$, funciones L, f que mapean $T \times \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m$ a $\mathbf{R}$, $\mathbf{R}^n$, y una función $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_q)$ que mapea $\mathbf{R}^m$ a $\mathbf{R}^q$ respectivamente.

• Denotamos por $\mathcal{X}$ al espacio de funciones absolutamente continuas que mapean T a $\mathbf{R}^n$, y definimos $\mathcal{U}_s := L^\infty(T; \mathbf{R}^s)$ $(s \in \mathbf{N})$.

• A los elementos de $\mathcal{X} \times \mathcal{U}_m$ se les llama *procesos* y un proceso (x, u) es *admisible* si éste satisface (a)-(c).

Procesos admisibles y soluciones locales

- Supongamos que tenemos dados un intervalo $T := [t_0, t_1]$ en $\mathbf{R}$, dos puntos fijos ξ_0, ξ_1 en $\mathbf{R}^n$, funciones L, f que mapean $T \times \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m$ a $\mathbf{R}$, $\mathbf{R}^n$, y una función $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_q)$ que mapea $\mathbf{R}^m$ a $\mathbf{R}^q$ respectivamente.

- Denotamos por $\mathcal{X}$ al espacio de funciones absolutamente continuas que mapean T a $\mathbf{R}^n$, y definimos $\mathcal{U}_s := L^\infty(T; \mathbf{R}^s)$ $(s \in \mathbf{N})$.

- A los elementos de $\mathcal{X} \times \mathcal{U}_m$ se les llama *procesos* y un proceso (x, u) es *admisible* si éste satisface (a)-(c).

- Un proceso (x, u) es un *mínimo débil* de (P), si éste es un mínimo de I relativo a la norma

$$\|(x, u)\| := \text{ínf}\{C > 0 : |(x(t), u(t))| \leq C \text{ (c.s. en } T)\},$$

esto es, si para alguna $\epsilon > 0$, $I(x, u) \leq I(y, v)$ para todo proceso admisible (y, v) que satisface $\|(y, v) - (x, u)\| < \epsilon$. Éste será un *mínimo estricto* si $I(x, u) = I(y, v)$ solo en el caso en que $(x, u) = (y, v)$.

Suposiciones de suavidad

A lo largo de esta sección asumiremos que las funciones L, f son continuas y de clase C^2 con respecto a x y a u en $T \times \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m$, y la función φ es C^2 en $\mathbf{R}^m$.

Definiciones básicas

Definiciones básicas

- Para toda $(t, x, u, p, \mu) \in T \times \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m \times \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^q$ sea

$$H(t, x, u, p, \mu) := \langle p, f(t, x, u)\rangle - L(t, x, u) - \langle \mu, \varphi(u)\rangle.$$

Definiciones básicas

- Para toda $(t, x, u, p, \mu) \in T \times \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m \times \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^q$ sea

$$H(t, x, u, p, \mu) := \langle p, f(t, x, u)\rangle - L(t, x, u) - \langle \mu, \varphi(u)\rangle.$$

- Dadas $p \in \mathcal{X}$ y $\mu \in U_q$ definimos, para toda $(t, x, u) \in T \times \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m$,

$$F(t, x, u) := -H(t, x, u, p(t), \mu(t)) - \langle \dot{p}(t), x\rangle.$$

Definiciones básicas

• Para toda $(t,x,u,p,\mu) \in T \times \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m \times \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^q$ sea

$$H(t,x,u,p,\mu) := \langle p, f(t,x,u)\rangle - L(t,x,u) - \langle \mu, \varphi(u)\rangle.$$

• Dadas $p \in \mathcal{X}$ y $\mu \in U_q$ definimos, para toda $(t,x,u) \in T \times \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m$,

$$F(t,x,u) := -H(t,x,u,p(t),\mu(t)) - \langle \dot{p}(t), x\rangle.$$

• Consideramos la *segunda variación* de J con respecto a $(x,u) \in \mathcal{X} \times U_m$ sobre $(y,v) \in \mathcal{X} \times L^2(T;\mathbf{R}^m)$ dada por

$$J''((x,u);(y,v)) := \int_{t_0}^{t_1} 2\Omega(t,y(t),v(t))dt$$

Definiciones básicas

- Para toda $(t,x,u,p,\mu) \in T \times \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m \times \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^q$ sea

$$H(t,x,u,p,\mu) := \langle p, f(t,x,u)\rangle - L(t,x,u) - \langle \mu, \varphi(u)\rangle.$$

- Dadas $p \in \mathcal{X}$ y $\mu \in \mathcal{U}_q$ definimos, para toda $(t,x,u) \in T \times \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m$,

$$F(t,x,u) := -H(t,x,u,p(t),\mu(t)) - \langle \dot{p}(t), x\rangle.$$

- Consideramos la *segunda variación* de J con respecto a $(x,u) \in \mathcal{X} \times \mathcal{U}_m$ sobre $(y,v) \in \mathcal{X} \times L^2(T;\mathbf{R}^m)$ dada por

$$J''((x,u);(y,v)) := \int_{t_0}^{t_1} 2\Omega(t,y(t),v(t))dt$$

donde, para toda $(t,y,v) \in T \times \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m$,

$$2\Omega(t,y,v) := \langle y, F_{xx}(t,x(t),u(t))y\rangle + 2\langle y, F_{xu}(t,x(t),u(t))v\rangle + \langle v, F_{uu}(t,x(t),u(t))v\rangle.$$

Definiciones básicas

• Dadas $p \in \mathcal{X}$ y $\mu \in U_q$, decimos que (x_0, u_0, p, μ) (o a veces que (x_0, u_0)) es *no singular* si el determinante

$$|F_{uu}(t, x_0(t), u_0(t))| = |-H_{uu}(t, x_0(t), u_0(t), p(t), \mu(t))| \neq 0 \quad (t \in T).$$

Definiciones básicas

• Dadas $p \in \mathcal{X}$ y $\mu \in U_q$, decimos que (x_0, u_0, p, μ) (o a veces que (x_0, u_0)) es *no singular* si el determinante

$$|F_{uu}(t, x_0(t), u_0(t))| = |-H_{uu}(t, x_0(t), u_0(t), p(t), \mu(t))| \neq 0 \quad (t \in T).$$

• Dadas $p \in \mathcal{X}$ y $\mu \in \mathrm{U}_q$, decimos que (x_0, u_0, p, μ) (o a veces que (x_0, u_0)) satisface la condición de *Legendre-Clebsch* si

$$F_{uu}(t, x_0(t), u_0(t)) = -H_{uu}(t, x_0(t), u_0(t), p(t), \mu(t)) \geq 0 \quad (\text{c.s. en } T).$$

Definiciones básicas

• Dadas $p \in \mathcal{X}$ y $\mu \in U_q$, decimos que (x_0, u_0, p, μ) (o a veces que (x_0, u_0)) es *no singular* si el determinante

$$|F_{uu}(t, x_0(t), u_0(t))| = |-H_{uu}(t, x_0(t), u_0(t), p(t), \mu(t))| \neq 0 \quad (t \in T).$$

• Dadas $p \in \mathcal{X}$ y $\mu \in \mathrm{U}_q$, decimos que (x_0, u_0, p, μ) (o a veces que (x_0, u_0)) satisface la condición de *Legendre-Clebsch* si

$$F_{uu}(t, x_0(t), u_0(t)) = -H_{uu}(t, x_0(t), u_0(t), p(t), \mu(t)) \geq 0 \quad (\text{c.s. en } T).$$

• Dadas $p \in \mathcal{X}$ y $\mu \in U_q$, decimos que (x_0, u_0, p, μ) satisface la condición *reforzada de Legendre-Clebsch* si

$$F_{uu}(t, x_0(t), u_0(t)) = -H_{uu}(t, x_0(t), u_0(t), p(t), \mu(t)) > 0 \quad (t \in T).$$

Definiciones básicas

- Denotamos por E a la función *exceso de Weierstrass* con respecto a F,

$$E(t,x,u,v) := F(t,x,v) - F(t,x,u) - F_u(t,x,u)(v-u).$$

Definiciones básicas

- Denotamos por E a la función *exceso de Weierstrass* con respecto a F,

$$E(t,x,u,v) := F(t,x,v) - F(t,x,u) - F_u(t,x,u)(v-u).$$

- Para toda $u \in L^1(T;\mathbf{R}^m)$ sea

$$D(u) := \int_{t_0}^{t_1} V(u(t))dt \quad \text{donde} \quad V(b) := (1+|b|^2)^{1/2} - 1.$$

Definiciones básicas

- Denotamos por E a la función *exceso de Weierstrass* con respecto a F,

$$E(t,x,u,v) := F(t,x,v) - F(t,x,u) - F_u(t,x,u)(v-u).$$

- Para toda $u \in L^1(T;\mathbf{R}^m)$ sea

$$D(u) := \int_{t_0}^{t_1} V(u(t))dt \quad \text{donde} \quad V(b) := (1+|b|^2)^{1/2} - 1.$$

- Para toda $u \in \mathbf{R}^m$, sea

$$\mathcal{I}_a(u) := \{\alpha \in R \mid \varphi_\alpha(u) = 0\},$$

el conjunto de *índices activos* de u.

Dos nuevos teoremas de suficiencia para mínimos débiles en control óptimo

Dos nuevos teoremas de suficiencia para mínimos débiles en control óptimo

2.1 Teorema:

Sea (x_0, u_0) un proceso admisible. Asumamos que $\mathcal{I}_a(u_0(\cdot))$ es constante a pedazos en T, y supongamos que existen $p \in \mathcal{X}$, $\mu \in \mathrm{U}_q$ con $\mu_\alpha(t) \geq 0$ y $\mu_\alpha(t)\varphi_\alpha(u_0(t)) = 0$ $(\alpha \in R, t \in T)$ tales que

$\dot{p}(t) = -H_x^*(t, x_0(t), u_0(t), p(t), \mu(t))$ (c.s. en T),
$H_u(t, x_0(t), u_0(t), p(t), \mu(t)) = 0$ $(t \in T)$,

Dos nuevos teoremas de suficiencia para mínimos débiles en control óptimo

2.1 Teorema:

Sea (x_0, u_0) un proceso admisible. Asumamos que $\mathcal{I}_a(u_0(\cdot))$ es constante a pedazos en T, y supongamos que existen $p \in \mathcal{X}$, $\mu \in \mathrm{U}_q$ con $\mu_\alpha(t) \geq 0$ y $\mu_\alpha(t)\varphi_\alpha(u_0(t)) = 0$ $(\alpha \in R,\, t \in T)$ tales que

$\dot{p}(t) = -H_x^*(t, x_0(t), u_0(t), p(t), \mu(t))$ (c.s. en T),
$H_u(t, x_0(t), u_0(t), p(t), \mu(t)) = 0$ $(t \in T)$,

y las siguientes condiciones son satisfechas:

Dos nuevos teoremas de suficiencia para mínimos débiles en control óptimo

2.1 Teorema:

Sea (x_0, u_0) un proceso admisible. Asumamos que $\mathcal{I}_a(u_0(\cdot))$ es constante a pedazos en T, y supongamos que existen $p \in \mathcal{X}$, $\mu \in \mathrm{U}_q$ con $\mu_\alpha(t) \geq 0$ y $\mu_\alpha(t)\varphi_\alpha(u_0(t)) = 0$ ($\alpha \in R$, $t \in T$) tales que

$\dot{p}(t) = -H_x^*(t, x_0(t), u_0(t), p(t), \mu(t))$ (c.s. en T),
$H_u(t, x_0(t), u_0(t), p(t), \mu(t)) = 0$ ($t \in T$),

y las siguientes condiciones son satisfechas:

(i) $F_{uu}(t, x_0(t), u_0(t)) \geq 0$ (c.s. en T).

Dos nuevos teoremas de suficiencia para mínimos débiles en control óptimo

2.1 Teorema:

Sea (x_0, u_0) un proceso admisible. Asumamos que $\mathcal{I}_a(u_0(\cdot))$ es constante a pedazos en T, y supongamos que existen $p \in \mathcal{X}$, $\mu \in \mathrm{U}_q$ con $\mu_\alpha(t) \geq 0$ y $\mu_\alpha(t)\varphi_\alpha(u_0(t)) = 0$ ($\alpha \in R$, $t \in T$) tales que

$\dot{p}(t) = -H_x^*(t, x_0(t), u_0(t), p(t), \mu(t))$ (c.s. en T),
$H_u(t, x_0(t), u_0(t), p(t), \mu(t)) = 0$ ($t \in T$),

y las siguientes condiciones son satisfechas:

(i) $F_{uu}(t, x_0(t), u_0(t)) \geq 0$ (c.s. en T).

(ii) $J''((x_0, u_0); (y, v)) > 0$ para toda $(y, v) \neq (0, 0)$, $(y, v) \in \mathcal{X} \times L^2(T; \mathbf{R}^m)$ que satisface

(a) $\dot{y}(t) = f_x(t, x_0(t), u_0(t))y(t) + f_u(t, x_0(t), u_0(t))v(t)$ (c.s. en T), $y(t_0) = y(t_1) = 0$.

(b) $\varphi'_\alpha(u_0(t))v(t) \leq 0$ (c.s. en T, $\alpha \in \mathcal{I}_a(u_0(t))$), $\varphi'_\beta(u_0(t))v(t) = 0$ (c.s. en T, $\beta \in Q$).

Dos nuevos teoremas de suficiencia para mínimos débiles en control óptimo

2.1 Teorema:

Sea (x_0, u_0) un proceso admisible. Asumamos que $\mathcal{I}_a(u_0(\cdot))$ es constante a pedazos en T, y supongamos que existen $p \in \mathcal{X}$, $\mu \in \mathrm{U}_q$ con $\mu_\alpha(t) \geq 0$ y $\mu_\alpha(t)\varphi_\alpha(u_0(t)) = 0$ $(\alpha \in R,\, t \in T)$ tales que

$\dot{p}(t) = -H_x^*(t, x_0(t), u_0(t), p(t), \mu(t))$ (c.s. en T),
$H_u(t, x_0(t), u_0(t), p(t), \mu(t)) = 0$ $(t \in T)$,

y las siguientes condiciones son satisfechas:

(i) $F_{uu}(t, x_0(t), u_0(t)) \geq 0$ (c.s. en T).

(ii) $J''((x_0, u_0); (y, v)) > 0$ para toda $(y, v) \neq (0, 0)$, $(y, v) \in \mathcal{X} \times L^2(T; \mathbf{R}^m)$ que satisface

(a) $\dot{y}(t) = f_x(t, x_0(t), u_0(t))y(t) + f_u(t, x_0(t), u_0(t))v(t)$ (c.s. en T), $y(t_0) = y(t_1) = 0$.

(b) $\varphi'_\alpha(u_0(t))v(t) \leq 0$ (c.s. en T, $\alpha \in \mathcal{I}_a(u_0(t))$), $\varphi'_\beta(u_0(t))v(t) = 0$ (c.s. en T, $\beta \in Q$).

(iii) Para algunas $h, \epsilon > 0$, si (x, u) es admisible con $\|(x, u) - (x_0, u_0)\| < \epsilon$, se tiene que

$$\int_{t_0}^{t_1} E(t, x(t), u_0(t), u(t))dt \geq hD(u - u_0).$$

Dos nuevos teoremas de suficiencia para mínimos débiles en control óptimo

2.1 Teorema:

Sea (x_0, u_0) un proceso admisible. Asumamos que $\mathcal{I}_a(u_0(\cdot))$ es constante a pedazos en T, y supongamos que existen $p \in \mathcal{X}$, $\mu \in \mathrm{U}_q$ con $\mu_\alpha(t) \geq 0$ y $\mu_\alpha(t)\varphi_\alpha(u_0(t)) = 0$ ($\alpha \in R$, $t \in T$) tales que

$\dot{p}(t) = -H_x^*(t, x_0(t), u_0(t), p(t), \mu(t))$ (c.s. en T),
$H_u(t, x_0(t), u_0(t), p(t), \mu(t)) = 0$ ($t \in T$),

y las siguientes condiciones son satisfechas:

(i) $F_{uu}(t, x_0(t), u_0(t)) \geq 0$ (c.s. en T).

(ii) $J''((x_0, u_0); (y, v)) > 0$ para toda $(y, v) \neq (0, 0)$, $(y, v) \in \mathcal{X} \times L^2(T; \mathbf{R}^m)$ que satisface

(a) $\dot{y}(t) = f_x(t, x_0(t), u_0(t))y(t) + f_u(t, x_0(t), u_0(t))v(t)$ (c.s. en T), $y(t_0) = y(t_1) = 0$.

(b) $\varphi'_\alpha(u_0(t))v(t) \leq 0$ (c.s. en T, $\alpha \in \mathcal{I}_a(u_0(t))$), $\varphi'_\beta(u_0(t))v(t) = 0$ (c.s. en T, $\beta \in Q$).

(iii) Para algunas $h, \epsilon > 0$, si (x, u) es admisible con $\|(x, u) - (x_0, u_0)\| < \epsilon$, se tiene que

$$\int_{t_0}^{t_1} E(t, x(t), u_0(t), u(t))dt \geq hD(u - u_0).$$

Entonces, existen $\rho, \delta > 0$ tales que si (x, u) es admisible con $\|(x, u) - (x_0, u_0)\| < \rho$,

$$I(x, u) \geq I(x_0, u_0) + \delta D(u - u_0).$$

Dos nuevos teoremas de suficiencia para mínimos débiles en control óptimo

2.1 Teorema:

Sea (x_0, u_0) un proceso admisible. Asumamos que $\mathcal{I}_a(u_0(\cdot))$ es constante a pedazos en T, y supongamos que existen $p \in \mathcal{X}$, $\mu \in \mathrm{U}_q$ con $\mu_\alpha(t) \geq 0$ y $\mu_\alpha(t)\varphi_\alpha(u_0(t)) = 0$ $(\alpha \in R,\, t \in T)$ tales que

$\dot{p}(t) = -H_x^*(t, x_0(t), u_0(t), p(t), \mu(t))$ (c.s. en T),
$H_u(t, x_0(t), u_0(t), p(t), \mu(t)) = 0$ $(t \in T)$,

y las siguientes condiciones son satisfechas:

(i) $F_{uu}(t, x_0(t), u_0(t)) \geq 0$ (c.s. en T).

(ii) $J''((x_0, u_0); (y, v)) > 0$ para toda $(y, v) \neq (0, 0)$, $(y, v) \in \mathcal{X} \times L^2(T; \mathbf{R}^m)$ que satisface

(a) $\dot{y}(t) = f_x(t, x_0(t), u_0(t))y(t) + f_u(t, x_0(t), u_0(t))v(t)$ (c.s. en T), $y(t_0) = y(t_1) = 0$.

(b) $\varphi'_\alpha(u_0(t))v(t) \leq 0$ (c.s. en T, $\alpha \in \mathcal{I}_a(u_0(t))$), $\varphi'_\beta(u_0(t))v(t) = 0$ (c.s. en T, $\beta \in Q$).

(iii) Para algunas $h, \epsilon > 0$, si (x, u) es admisible con $\|(x, u) - (x_0, u_0)\| < \epsilon$, se tiene que

$$\int_{t_0}^{t_1} E(t, x(t), u_0(t), u(t))dt \geq hD(u - u_0).$$

Entonces, existen $\rho, \delta > 0$ tales que si (x, u) es admisible con $\|(x, u) - (x_0, u_0)\| < \rho$,

$$I(x, u) \geq I(x_0, u_0) + \delta D(u - u_0).$$

En particular, (x_0, u_0) es mínimo estricto débil de (P).

Dos nuevos teoremas de suficiencia para mínimos débiles en control óptimo

Dos nuevos teoremas de suficiencia para mínimos débiles en control óptimo

Corolario:

Sea (x_0, u_0) un proceso admisible con u_0 continua. Asumamos que $\mathcal{I}_a(u_0(\cdot))$ es constante a pedazos en T, y supongamos que existen $p \in \mathcal{X}$, $\mu \in \mathrm{U}_q$ con $\mu_\alpha(t) \geq 0$ y $\mu_\alpha(t)\varphi_\alpha(u_0(t)) = 0$ $(\alpha \in R, t \in T)$ tales que

$\dot{p}(t) = -H_x^*(t, x_0(t), u_0(t), p(t), \mu(t))$ (c.s. en T),

$H_u(t, x_0(t), u_0(t), p(t), \mu(t)) = 0$ $(t \in T)$,

Dos nuevos teoremas de suficiencia para mínimos débiles en control óptimo

Corolario:

Sea (x_0, u_0) un proceso admisible con u_0 continua. Asumamos que $\mathcal{I}_a(u_0(\cdot))$ es constante a pedazos en T, y supongamos que existen $p \in \mathcal{X}$, $\mu \in \mathrm{U}_q$ con $\mu_\alpha(t) \geq 0$ y $\mu_\alpha(t)\varphi_\alpha(u_0(t)) = 0$ ($\alpha \in R, t \in T$) tales que

$\dot{p}(t) = -H_x^*(t, x_0(t), u_0(t), p(t), \mu(t))$ (c.s. en T),

$H_u(t, x_0(t), u_0(t), p(t), \mu(t)) = 0$ ($t \in T$),

y las siguientes condiciones son satisfechas:

Dos nuevos teoremas de suficiencia para mínimos débiles en control óptimo

Corolario:

Sea (x_0, u_0) un proceso admisible con u_0 continua. Asumamos que $\mathcal{I}_a(u_0(\cdot))$ es constante a pedazos en T, y supongamos que existen $p \in \mathcal{X}$, $\mu \in \mathrm{U}_q$ con $\mu_\alpha(t) \geq 0$ y $\mu_\alpha(t)\varphi_\alpha(u_0(t)) = 0$ $(\alpha \in R, t \in T)$ tales que

$\dot{p}(t) = -H_x^*(t, x_0(t), u_0(t), p(t), \mu(t))$ (c.s. en T),

$H_u(t, x_0(t), u_0(t), p(t), \mu(t)) = 0$ $(t \in T)$,

y las siguientes condiciones son satisfechas:

(i) $F_{uu}(t, x_0(t), u_0(t)) > 0$ $(t \in T)$.

Dos nuevos teoremas de suficiencia para mínimos débiles en control óptimo

Corolario:

Sea (x_0, u_0) un proceso admisible con u_0 continua. Asumamos que $\mathcal{I}_a(u_0(\cdot))$ es constante a pedazos en T, y supongamos que existen $p \in \mathcal{X}$, $\mu \in \mathrm{U}_q$ con $\mu_\alpha(t) \geq 0$ y $\mu_\alpha(t)\varphi_\alpha(u_0(t)) = 0$ $(\alpha \in R, t \in T)$ tales que

$\dot{p}(t) = -H_x^*(t, x_0(t), u_0(t), p(t), \mu(t))$ (c.s. en T),

$H_u(t, x_0(t), u_0(t), p(t), \mu(t)) = 0$ $(t \in T)$,

y las siguientes condiciones son satisfechas:

(i) $F_{uu}(t, x_0(t), u_0(t)) > 0$ $(t \in T)$.

(ii) $J''((x_0, u_0); (y, v)) > 0$ para toda $(y, v) \neq (0, 0)$, $(y, v) \in \mathcal{X} \times L^2(T; \mathbf{R}^m)$ que satisface

(a) $\dot{y}(t) = f_x(t, x_0(t), u_0(t))y(t) + f_u(t, x_0(t), u_0(t))v(t)$ (c.s. en T), $\quad y(t_0) = y(t_1) = 0$.

(b) $\varphi'_\alpha(u_0(t))v(t) \leq 0$ (c.s. en T, $\alpha \in \mathcal{I}_a(u_0(t))$), $\varphi'_\beta(u_0(t))v(t) = 0$ (c.s. en T, $\beta \in Q$).

Dos nuevos teoremas de suficiencia para mínimos débiles en control óptimo

Corolario:

Sea (x_0, u_0) un proceso admisible con u_0 continua. Asumamos que $\mathcal{I}_a(u_0(\cdot))$ es constante a pedazos en T, y supongamos que existen $p \in \mathcal{X}$, $\mu \in \mathrm{U}_q$ con $\mu_\alpha(t) \geq 0$ y $\mu_\alpha(t)\varphi_\alpha(u_0(t)) = 0$ $(\alpha \in R, t \in T)$ tales que

$\dot{p}(t) = -H_x^*(t, x_0(t), u_0(t), p(t), \mu(t))$ (c.s. en T),

$H_u(t, x_0(t), u_0(t), p(t), \mu(t)) = 0$ $(t \in T)$,

y las siguientes condiciones son satisfechas:

(i) $F_{uu}(t, x_0(t), u_0(t)) > 0$ $(t \in T)$.

(ii) $J''((x_0, u_0); (y, v)) > 0$ para toda $(y, v) \neq (0, 0)$, $(y, v) \in \mathcal{X} \times L^2(T; \mathbf{R}^m)$ que satisface

(a) $\dot{y}(t) = f_x(t, x_0(t), u_0(t))y(t) + f_u(t, x_0(t), u_0(t))v(t)$ (c.s. en T), $\quad y(t_0) = y(t_1) = 0$.

(b) $\varphi'_\alpha(u_0(t))v(t) \leq 0$ (c.s. en T, $\alpha \in \mathcal{I}_a(u_0(t))$), $\varphi'_\beta(u_0(t))v(t) = 0$ (c.s. en T, $\beta \in Q$).

Entonces, existen $\rho, \delta > 0$ tales que si (x, u) es admisible con $\|(x, u) - (x_0, u_0)\| < \rho$,

$$I(x, u) \geq I(x_0, u_0) + \delta D(u - u_0).$$

Dos nuevos teoremas de suficiencia para mínimos débiles en control óptimo

Corolario:

Sea (x_0, u_0) un proceso admisible con u_0 continua. Asumamos que $\mathcal{I}_a(u_0(\cdot))$ es constante a pedazos en T, y supongamos que existen $p \in \mathcal{X}$, $\mu \in \mathrm{U}_q$ con $\mu_\alpha(t) \geq 0$ y $\mu_\alpha(t)\varphi_\alpha(u_0(t)) = 0$ $(\alpha \in R, t \in T)$ tales que

$\dot{p}(t) = -H_x^*(t, x_0(t), u_0(t), p(t), \mu(t))$ (c.s. en T),

$H_u(t, x_0(t), u_0(t), p(t), \mu(t)) = 0$ $(t \in T)$,

y las siguientes condiciones son satisfechas:

(i) $F_{uu}(t, x_0(t), u_0(t)) > 0$ $(t \in T)$.

(ii) $J''((x_0, u_0); (y, v)) > 0$ para toda $(y, v) \neq (0, 0)$, $(y, v) \in \mathcal{X} \times L^2(T; \mathbf{R}^m)$ que satisface

(a) $\dot{y}(t) = f_x(t, x_0(t), u_0(t))y(t) + f_u(t, x_0(t), u_0(t))v(t)$ (c.s. en T), $\quad y(t_0) = y(t_1) = 0$.

(b) $\varphi'_\alpha(u_0(t))v(t) \leq 0$ (c.s. en T, $\alpha \in \mathcal{I}_a(u_0(t))$), $\varphi'_\beta(u_0(t))v(t) = 0$ (c.s. en T, $\beta \in Q$).

Entonces, existen $\rho, \delta > 0$ tales que si (x, u) es admisible con $\|(x, u) - (x_0, u_0)\| < \rho$,

$$I(x, u) \geq I(x_0, u_0) + \delta D(u - u_0).$$

En particular, (x_0, u_0) es un mínimo estricto débil de (P).

Ejemplo

•Ahora, proporcionaremos un ejemplo de un problema (P) de control óptimo con restricciones en los controles con desigualdades e igualdades y con puntos fijos finales en el que una aplicación del Teorema principal muestra que el extremo *singular* bajo consideración es un mínimo estricto débil de (P).

• Vale la pena notar que el control óptimo que exhibimos en este ejemplo *no es continuo ni continuo a pedazos sino únicamente esencialmente acotado*, además, el conjunto U de controles admisibles es no convexo.

Ejemplo

Sea (P) el problema de minimizar

$$I(x,u) = \int_0^1 \{u_1^2(t) + u_1(t) - x^2(t) + u_1^3(t)u_2(t)\}dt$$

sujeta a $\dot{x}(t) = x^3(t) - u_1(t)u_2(t) - \frac{1}{2}u_1(t)$ $(t \in [0,1])$,
$x(0) = x(1) = 0$, *y*

$$\operatorname{sen} u_1(t) \geq 0 \quad y \quad u_2^2(t) = 1 \quad (t \in [0,1]).$$

Ejemplo

Sea (P) el problema de minimizar

$$I(x,u) = \int_0^1 \{u_1^2(t) + u_1(t) - x^2(t) + u_1^3(t)u_2(t)\}dt$$

sujeta a $\dot{x}(t) = x^3(t) - u_1(t)u_2(t) - \frac{1}{2}u_1(t)$ $(t \in [0,1])$*,*
$x(0) = x(1) = 0$*, y*

$$\operatorname{sen} u_1(t) \geq 0 \quad y \quad u_2^2(t) = 1 \quad (t \in [0,1]).$$

En este caso $T = [0,1]$*,* $n = 1$*,* $m = 2$*,* $q = 2$*,* $r = 1$*,* $\xi_0 = \xi_1 = 0$*,*

$$L(t,x,u) = u_1^2 + u_1 - x^2 + u_1^3 u_2, \quad f(t,x,u) = x^3 - u_1 u_2 - \frac{1}{2}u_1,$$

$$\varphi_1(u) = -\operatorname{sen} u_1, \quad \varphi_2(u) = 1 - u_2^2.$$

Ejemplo

De esta manera,

$$H(t,x,u,p,\mu) = px^3 - pu_1u_2 - \frac{1}{2}pu_1 - u_1^2 - u_1 + x^2 - u_1^3u_2 + \mu_1 \operatorname{sen} u_1 - \mu_2[1 - u_2^2],$$

Ejemplo

De esta manera,

$$H(t,x,u,p,\mu) = px^3 - pu_1u_2 - \tfrac{1}{2}pu_1 - u_1^2 - u_1 + x^2 - u_1^3u_2 + \mu_1 \operatorname{sen} u_1 - \mu_2[1 - u_2^2],$$

y entonces

$$H_x(t,x,u,p,\mu) = 3px^2 + 2x,$$

$$H_u(t,x,u,p,\mu) = (-pu_2 - \tfrac{1}{2}p - 2u_1 - 1 - 3u_1^2u_2 + \mu_1 \cos u_1, -pu_1 - u_1^3 + 2\mu_2u_2).$$

Ejemplo

Sea $x_0 \equiv 0$, $u_{01} \equiv 0$,

$$u_{02}(t) := 1 \quad \text{si} \quad t \in \bigcup_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{2n}, \frac{1}{2n-1} \right],$$

y

$$u_{02}(t) := -1 \quad \text{si} \quad t \in \bigcup_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1}{2n-1}, \frac{1}{2n-2} \right).$$

Ejemplo

Sea $x_0 \equiv 0$, $u_{01} \equiv 0$,

$$u_{02}(t) := 1 \quad \text{si} \quad t \in \bigcup_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{2n}, \frac{1}{2n-1} \right],$$

y

$$u_{02}(t) := -1 \quad \text{si} \quad t \in \bigcup_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1}{2n-1}, \frac{1}{2n-2} \right).$$

En consecuencia, (x_0, u_0) es admisible y u_0 no es continua a pedazos en T. Si definimos $(p, \mu) \equiv (0, 1, 0)$, entonces $\mu_1(t) \geq 0$ y $\mu_1(t)\varphi_1(u_0(t)) = 0$ $(t \in T)$. También, $\mathcal{I}_a(u_0(t)) = \{1\}$ es constante en T, y (x_0, u_0, p, μ) satisface la condición clásica de primer orden del Teorema 2.1.

Ejemplo

Tenemos que, para toda $(t, x, u) \in T \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}^2$,

$$F(t, x, u) = u_1^2 + u_1 + u_1^3 u_2 - \operatorname{sen} u_1 - x^2.$$

Ejemplo

Tenemos que, para toda $(t, x, u) \in T \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}^2$,

$$F(t, x, u) = u_1^2 + u_1 + u_1^3 u_2 - \operatorname{sen} u_1 - x^2.$$

Por lo tanto,

$$F_{uu}(\tilde{x}_0(t)) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (t \in T).$$

Ejemplo

Tenemos que, para toda $(t, x, u) \in T \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}^2$,

$$F(t, x, u) = u_1^2 + u_1 + u_1^3 u_2 - \operatorname{sen} u_1 - x^2.$$

Por lo tanto,

$$F_{uu}(\tilde{x}_0(t)) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (t \in T).$$

En consecuencia, el Teorema 2.1(i) se verifica y (x_0, u_0) es singular.

Ejemplo

También, $F_{xx}(\tilde{x}_0(t)) = -2$, $F_{xu}(\tilde{x}_0(t)) = (0,0)$ $(t \in T)$, y entonces para toda $(y,v) \neq (0,0)$, $(y,v) \in \mathcal{X} \times L^2(T;\mathbf{R}^2)$ que satisface

Ejemplo

También, $F_{xx}(\tilde{x}_0(t)) = -2$, $F_{xu}(\tilde{x}_0(t)) = (0,0)$ $(t \in T)$, y entonces para toda $(y,v) \neq (0,0)$, $(y,v) \in \mathcal{X} \times L^2(T;\mathbf{R}^2)$ que satisface

$$\dot{y}(t) = (-u_{02}(t) - \tfrac{1}{2})v_1(t) \text{ (c.s. en } T),$$

$y(0) = y(1) = 0$, y $-v_1(t) \leq 0$, $v_2(t) = 0$ (c.s. en T), se tiene que

Ejemplo

También, $F_{xx}(\tilde{x}_0(t)) = -2$, $F_{xu}(\tilde{x}_0(t)) = (0,0)$ $(t \in T)$, y entonces para toda $(y,v) \neq (0,0)$, $(y,v) \in \mathcal{X} \times L^2(T;\mathbf{R}^2)$ que satisface

$$\dot{y}(t) = (-u_{02}(t) - \tfrac{1}{2})v_1(t) \text{ (c.s. en } T),$$

$y(0) = y(1) = 0$, y $-v_1(t) \leq 0$, $v_2(t) = 0$ (c.s. en T), se tiene que

$$J''((x_0,u_0);(y,v)) = \int_0^1 \{2v_1^2(t) - 2y^2(t)\}dt > 0.$$

Ejemplo

También, $F_{xx}(\tilde{x}_0(t)) = -2$, $F_{xu}(\tilde{x}_0(t)) = (0,0)$ $(t \in T)$, y entonces para toda $(y,v) \neq (0,0)$, $(y,v) \in \mathcal{X} \times L^2(T;\mathbf{R}^2)$ que satisface

$$\dot{y}(t) = (-u_{02}(t) - \tfrac{1}{2})v_1(t) \text{ (c.s. en } T\text{)},$$

$y(0) = y(1) = 0$, y $-v_1(t) \leq 0$, $v_2(t) = 0$ (c.s. en T), se tiene que

$$J''((x_0,u_0);(y,v)) = \int_0^1 \{2v_1^2(t) - 2y^2(t)\}dt > 0.$$

De esta manera, el Teorema 2.1(ii) se verifica.

Ejemplo

Supongamos que el Teorema 2.1(iii) no se satisface. Entonces, para toda $q \in \mathbf{N}$, existe (x_q, u_q) admisible tal que

$$\|(x_q, u_q) - (x_0, u_0)\| < \min\{\epsilon, 1/q\}, \quad \int_0^1 E(t, x_q(t), u_0(t), u_q(t))dt < \frac{1}{q} D(u_q - u_0).$$

Ejemplo

Supongamos que el Teorema 2.1(iii) no se satisface. Entonces, para toda $q \in \mathbf{N}$, existe (x_q, u_q) admisible tal que

$$\|(x_q, u_q) - (x_0, u_0)\| < \text{mín}\{\epsilon, 1/q\}, \quad \int_0^1 E(t, x_q(t), u_0(t), u_q(t))dt < \frac{1}{q} D(u_q - u_0).$$

Como para toda $t \in T$ y $q \in \mathbf{N}$,

$$E(t, x_q(t), u_0(t), u_q(t)) = u_{1q}^2(t) + u_{1q}(t) + u_{1q}^3(t)u_{2q}(t) - \text{sen}\, u_{1q}(t),$$

Ejemplo

Supongamos que el Teorema 2.1(iii) no se satisface. Entonces, para toda $q \in \mathbf{N}$, existe (x_q, u_q) admisible tal que

$$\|(x_q, u_q) - (x_0, u_0)\| < \min\{\epsilon, 1/q\}, \quad \int_0^1 E(t, x_q(t), u_0(t), u_q(t))dt < \frac{1}{q} D(u_q - u_0).$$

Como para toda $t \in T$ y $q \in \mathbf{N}$,

$$E(t, x_q(t), u_0(t), u_q(t)) = u_{1q}^2(t) + u_{1q}(t) + u_{1q}^3(t) u_{2q}(t) - \operatorname{sen} u_{1q}(t),$$

entonces, para toda q suficientemente grande

$$\int_0^1 u_{1q}^2(t)dt < \frac{1}{q} D(u_q - u_0). \tag{2.11}$$

Ejemplo

Por el hecho de que para toda $b \in \mathbf{R}^2$ y $q \in \mathbf{N}$,

$$V(b) \leq \frac{|b|^2}{2}, \quad (2 + V(b))V(b) = |b|^2,$$

Ejemplo

Por el hecho de que para toda $b \in \mathbf{R}^2$ y $q \in \mathbf{N}$,

$$V(b) \leq \frac{|b|^2}{2}, \quad (2 + V(b))V(b) = |b|^2,$$

entonces, existe una constante $c_3 > 0$ tal que para toda q suficientemente grande,

$$D(u_q - u_0) \leq c_3 D(u_{1q}).$$

Ejemplo

Por el hecho de que para toda $b \in \mathbf{R}^2$ y $q \in \mathbf{N}$,

$$V(b) \leq \frac{|b|^2}{2}, \quad (2 + V(b))V(b) = |b|^2,$$

entonces, existe una constante $c_3 > 0$ tal que para toda q suficientemente grande,

$$D(u_q - u_0) \leq c_3 D(u_{1q}).$$

Ahora, si $D(u_{1q}) = 0$, entonces $D(u_q - u_0) = 0$ lo cual contradice (2.11).

Ejemplo

Por el hecho de que para toda $b \in \mathbf{R}^2$ y $q \in \mathbf{N}$,

$$V(b) \leq \frac{|b|^2}{2}, \quad (2 + V(b))V(b) = |b|^2,$$

entonces, existe una constante $c_3 > 0$ tal que para toda q suficientemente grande,

$$D(u_q - u_0) \leq c_3 D(u_{1q}).$$

Ahora, si $D(u_{1q}) = 0$, entonces $D(u_q - u_0) = 0$ lo cual contradice (2.11).
Por lo tanto, para toda q suficientemente grande,

$$\frac{D(u_q - u_0)}{D(u_{1q})} \leq c_3.$$

Ejemplo

Por el hecho de que para toda $b \in \mathbf{R}^2$ y $q \in \mathbf{N}$,

$$V(b) \leq \frac{|b|^2}{2}, \quad (2 + V(b))V(b) = |b|^2,$$

entonces, existe una constante $c_3 > 0$ tal que para toda q suficientemente grande,

$$D(u_q - u_0) \leq c_3 D(u_{1q}).$$

Ahora, si $D(u_{1q}) = 0$, entonces $D(u_q - u_0) = 0$ lo cual contradice (2.11).
Por lo tanto, para toda q suficientemente grande,

$$\frac{D(u_q - u_0)}{D(u_{1q})} \leq c_3.$$

Por (2.11), para toda q suficientemente grande,

$$\int_0^1 \frac{v_{1q}^2(t)}{w_{1q}^2(t)} dt < \frac{c_3}{2q}, \tag{2.12}$$

donde para toda $t \in T$ y $q \in \mathbf{N}$,

$$w_{1q}(t) := [1 + \tfrac{1}{2} V(u_{1q}(t))]^{1/2}, \quad v_{1q}(t) := \frac{u_{1q}(t)}{d_{1q}}, \quad d_{1q} := [2D(u_{1q})]^{1/2}.$$

Ejemplo

Pero como para toda $q \in \mathbf{N}$,

$$\int_0^1 \frac{v_{1q}^2(t)}{w_{1q}^2(t)} dt = 1,$$

haciendo que $q \to \infty$ en (2.12), uno obtiene $1 \leq 0$ lo cual es una contradicción. Consecuentemente, el Teorema 2.1(iii) se cumple.

Ejemplo

Pero como para toda $q \in \mathbf{N}$,

$$\int_0^1 \frac{v_{1q}^2(t)}{w_{1q}^2(t)} dt = 1,$$

haciendo que $q \to \infty$ en (2.12), uno obtiene $1 \leq 0$ lo cual es una contradicción. Consecuentemente, el Teorema 2.1(iii) se cumple.

Por el Teorema 2.1, (x_0, u_0) es un mínimo estricto débil de (P).

F. H. Clarke and V. M. Zeidan, Sufficiency and the Jacobi condition in the calculus of variations, Canadian Journal of Mathematics, 38 (1986), pp. 1199–1209.

F. H. Clarke, Functional Analysis, Calculus of Variations and Optimal Control, Springer-Verlag, London, 2013.

M. R. De Pinho and J. F. Rosenblueth, Mixed constraints in optimal control: an implicit function theorem approach, IMA Journal of Mathematical Control and Information, 24 (2007), pp. 197–218

M. R. Hestenes, Sufficient conditions for the problem of Bolza in the calculus of variations, Transactions of the American Mathematical Society, 36 (1934), pp. 793–818.

M. R. Hestenes, On sufficient conditions in the problems of Lagrange and Bolza, Annals of Mathematics, 37 (1936), pp. 543–551.

M. R. Hestenes, A direct sufficiency proof for the problem of Bolza in the calculus of variations, Transactions of the American Mathematical Society, 42 (1937), pp. 141–154.

M. R. Hestenes, Sufficient conditions for the isoperimetric problem of Bolza in the calculus of variations, Transactions of the American Mathematical Society, 60 (1946), pp. 93–118.

M. R. Hestenes, An indirect sufficiency proof for the problem of Bolza in nonparametric form, Transactions of the American Mathematical Society, 62 (1947), pp. 509–535.

M. R. Hestenes, Sufficient conditions for multiple integral problems in the calculus of variations, American Journal of Mathematics, 70 (1948), pp. 239–276.

M. R. Hestenes, Calculus of Variations and Optimal Control Theory, John Wiley, New York, 1966.

A. D. Ioffe and V. M. Tihomirov, Theory of Extremal Problems, Translated from the Russian by K. Makowski, Studies in Mathematics and its Applications **6**, North-Holland Publishing, Amsterdam, 1979.

P. D. Loewen, Second-order sufficiency criteria and local convexity for equivalent problems in the calculus of variations, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 146 (1990), pp. 512–522.

P. D. Loewen and H. Zheng, Generalized conjugate points for optimal control problems, Nonlinear Analysis, Theory, Methods & Applications 22 (1994), pp. 771–791.

K. Malanowski, Sufficient optimality conditions for optimal control subject to state constraints, SIAM Journal on Control and Optimization, 35 (1997), pp. 205–227.

K. Malanowski, H. Maurer and S. Pickenhain, Second order sufficient conditions for state- constrained optimal control problems, Journal of Optimization Theory and Applications, 123 (2004), pp. 595–617.

H. Maurer, First and second order sufficient optimality conditions in mathematical programming and optimal control, Mathematical Programming Study, 14 (1981), pp. 163–177.

H. Maurer and S. Pickenhain, Second order sufficient conditions for control problems with mixed control-state constraints, Journal of Optimization Theory and Applications, 86 (1995), pp. 649–667.

H. Maurer and H. J. Oberle, Second order sufficient conditions for optimal control problems with free final time: the Riccati approach, SIAM Journal on Control and Optimization, 41 (2002), pp. 380–403.

D. Q. Mayne, Sufficient conditions for a control to be a strong minimum, Journal of Optimization Theory and Applications, 21 (1977), pp. 339–351.

E. J. McShane, Sufficient conditions for a weak relative minimum in the problem of Bolza, Transactions of the American Mathematical Society, 52 (1942), pp. 344–379.

A. A. Milyutin and N. P. Osmolovskiĭ, Calculus of Variations and Optimal Control, Translations of Mathematical Monographs **180**, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 1998.

G. Sánchez Licea, Relaxing strengthened Legendre-Clebsch condition, SIAM Journal on Control and Optimization, 51 (2013), pp. 3886–3902.

G. Stefani and P. L. Zezza, Optimality conditions for a constrained optimal control problem, SIAM Journal on Control and Optimization, 34 (1996), pp. 635–659.

V. M. Zeidan, *First and second order sufficient conditions for optimal control and the calculus of variations*, Applied Mathematics and Optimization 11 (1984), pp. 209–226.

V. M. Zeidan, *Sufficiency conditions with minimal regularity assumptions*, Applied Mathematics and Optimization 20 (1989), pp. 19–31.

V. M. Zeidan, *The Riccati equation for optimal control problems with mixed state-control constraints: necessity and sufficiency*, SIAM Journal on Control and Optimization 32 (1994), pp. 1297–1321.

V. M. Zeidan, *Admissible directions and generalized coupled points for optimal control problems*, Nonlinear Analysis, Theory, Methods & Applications 26 (1996), pp. 479–507.

"A partir de que el universo es el más perfecto trabajo de un sabio creador, nada en absoluto tiene lugar en él sin alguna regla de máximos o mínimos."

- Leonhard Euler